第 2 节 分段函数中的动态分段点问题（★★★）

强化训练

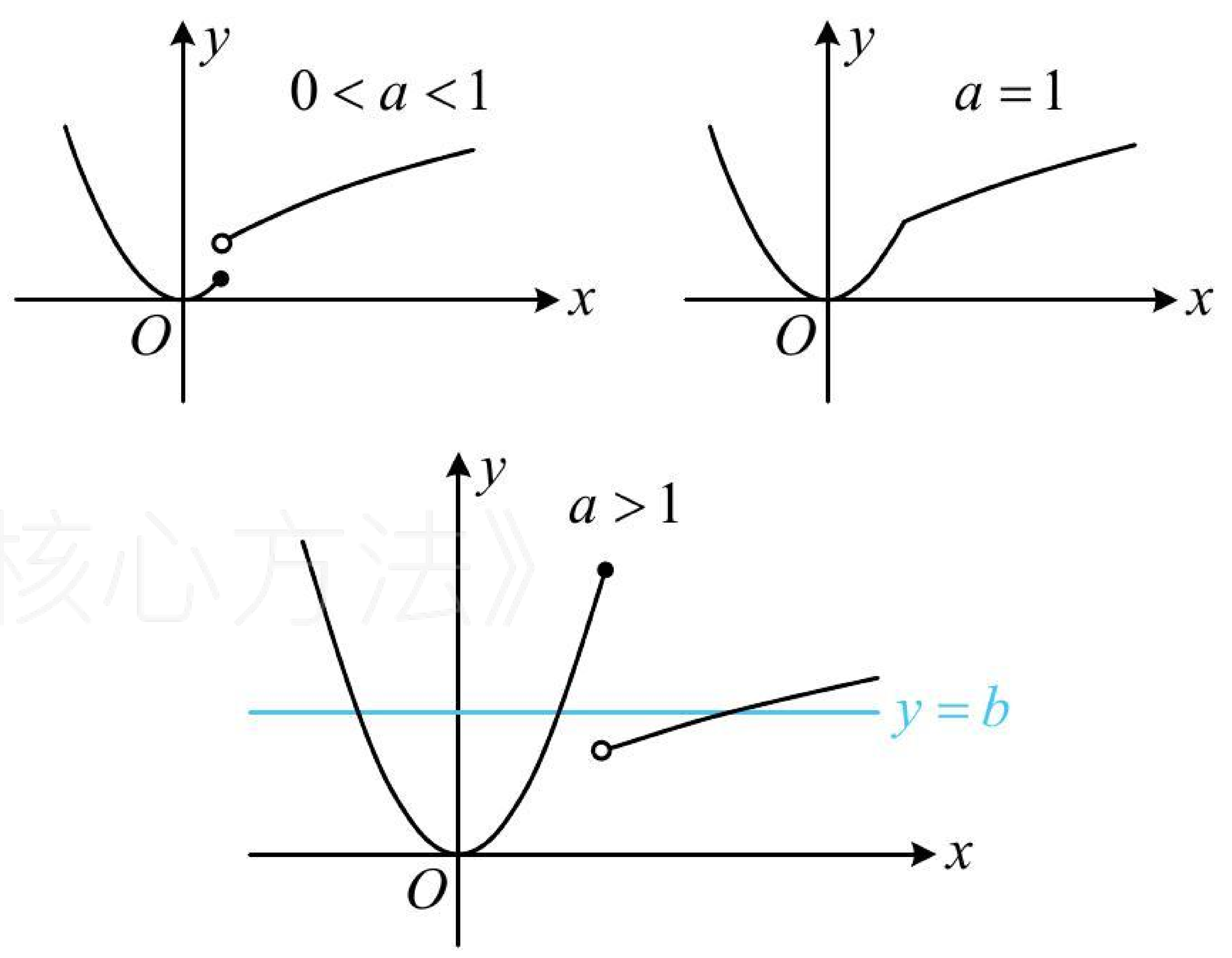
1.（★★★）设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2,x\le a\\ \sqrt{x},x>a\end{cases}$，其中 $a>0$，若存在实数 b，使得函数 $g(x)=f(x)-b$ 有 3 个零点，则实数 a 的取值范围为_____.

答案： $(1,+\infty)$

解析： $g(x)=0\Leftrightarrow f(x)=b$，所以问题等价于存在水平直线 $y=b$ 和 $f(x)$ 的图象有 3 个交点，

注意到函数 $y=x^2$ 和 $y=\sqrt{x}$ 的交点是 $(1,1)$，所以分 $0<a<1$、 $a=1$、 $a>1$ 三种情况画图分析，

如图，由图可知，只有当 $a>1$ 时，才能画出水平直线 $y=b$ 与 $f(x)$ 的图象有 3 个交点，所以 $a>1$.

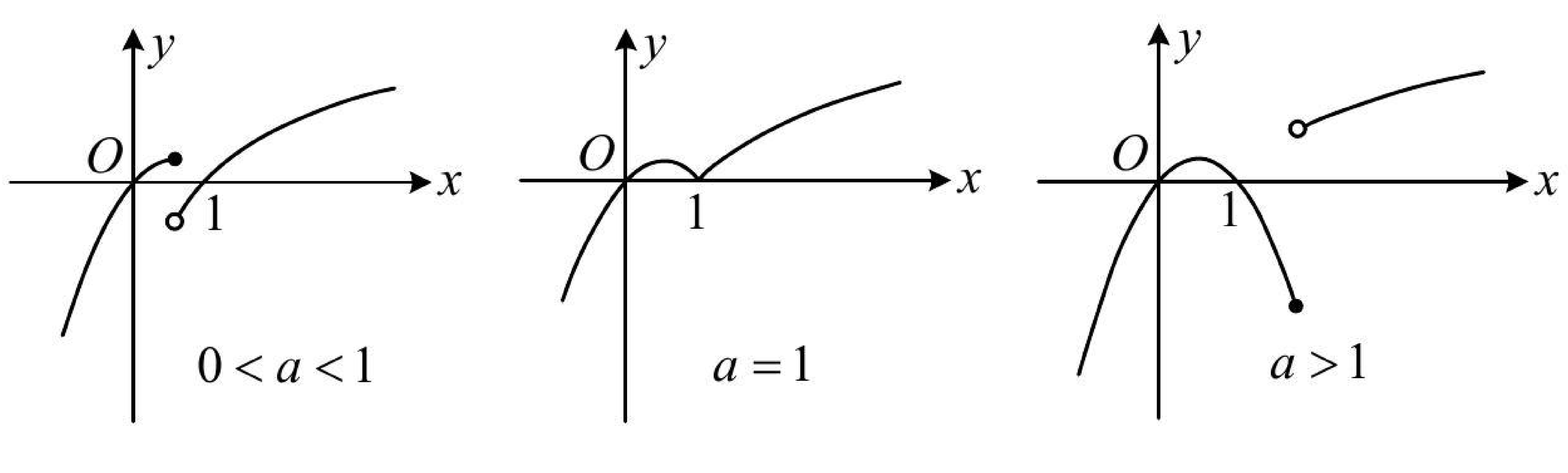


2.（★★★）设函数 $f(x)=\begin{cases}\ln x,x>a\\ x-x^2,x\le a\end{cases}$，其中 $a>0$，若 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有最小值，则实数 a 的取值范围为_____.

答案： $[1,+\infty)$

解析： 注意到 $y=\ln x$ 和 $y=x-x^2$ 的交点在 $x=1$ 处，所以分 $0<a<1$、 $a=1$、 $a>1$ 三种情况考虑，

如图，由图可知当且仅当 $a\ge1$ 时， $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有最小值.



3.（2022 • 北京模拟 • ★★★）设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2,x\le a\\ x^2-2ax+a,x>a\end{cases}$，若存在实数 b，使得函数 $g(x)=f(x)-b$ 有 3 个零点，则 a 的取值范围为_____.

答案：$(\frac{1}{2},+\infty)$

解析：$g(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=b$，故 $g(x)$ 有 3 个零点 $\Leftrightarrow$ 直线 $y=b$ 与 $f(x)$ 的图象有 3 个交点，

两段上 $f(x)$ 都是二次函数，对称轴分别为 $x=0$ 和 $x=a$，可以讨论 a 与 0 的大小来作图分析，

①当 $a<0$ 时，$f(x)$ 的图象如图 1 所示，由于 $f(x)$ 在 $(-\infty,a]$ 上↘，在 $(a,+\infty)$ 上↗，

所以直线 $y=b$ 与 $f(x)$ 的图象至多 2 个交点，不合题意；

②当 $a=0$ 时，$f(x)=x^2$，不合题意；

③当 $a>0$ 时，如图 2，要使存在直线 $y=b$ 与 $f(x)$ 的图象有 3 个交点，

应有间断点处左侧的点位于右侧的上方，从而 $a^2>a-a^2$，故 $a>\frac{1}{2}$；

综上所述，a 的取值范围为 $(\frac{1}{2},+\infty)$.

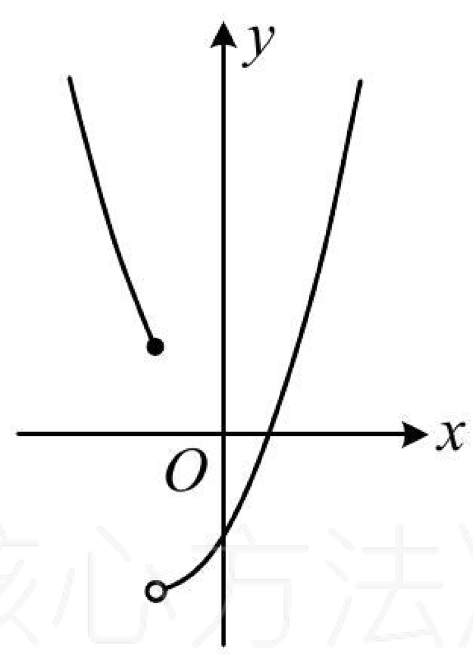


图1

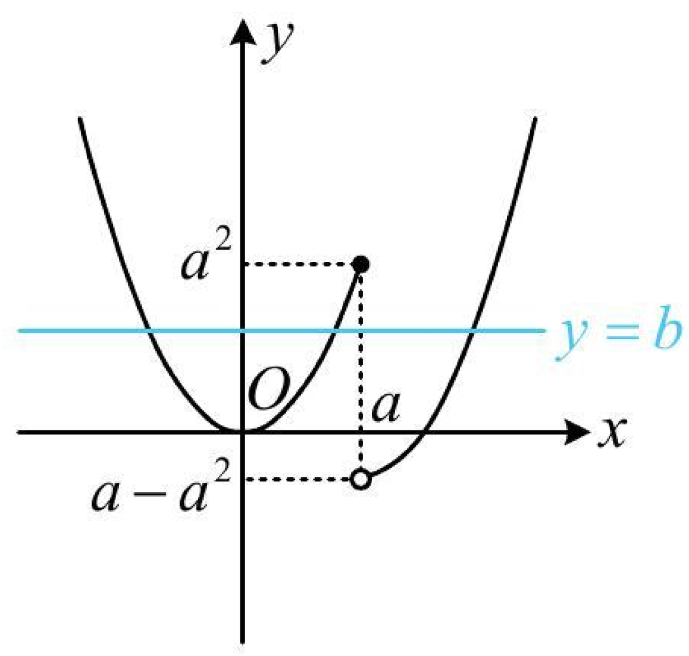


图2

4.（2022·北京卷·★★★★）设函数 $f(x)=\begin{cases}-ax+1,x<a\\(x-2)^2,x\ge a\end{cases}$，若 $f(x)$ 存在最小值，则 a 的一个值为_____，a 的最大值为_____.

答案：0（答案不唯一，见解析），1

解析：因为当 $x<a$ 时，$f(x)=-ax+1$ 的单调性与 a 的正负有关，所以由此讨论，画出 $f(x)$ 的图象，

当 $a<0$ 时，$f(x)$ 的图象如图 1，由图可知 $f(x)$ 无最小值，不合题意；

当 $a=0$ 时，$f(x)$ 的图象如图 2，由图可知 $f(x)$ 有最小值，满足题意；第一空可填 0；

当 $a>0$ 时，由于当 $x\ge a$ 时，$f(x)=(x-2)^2$，函数 $y=(x-2)^2$ 的对称轴是 $x=2$，故又讨论 a 与 2 的大小，

若 $0<a<2$，则要使 $f(x)$ 存在最小值，$f(x)$ 的图象应如图 3，射线 $y=-ax+1(x<a)$ 的右端点不能落到 x 轴下方，所以 $-a^2+1\ge 0$，故 $0<a\le 1$；

若 $a\ge 2$，则要使 $f(x)$ 存在最小值，$f(x)$ 的图象应如图 4 或图 5，所以 $-a^2+1\ge (a-2)^2$，

整理得：$2a^2-4a+3\le 0$，无解；

综上所述，当 $f(x)$ 存在最小值时，a 的取值范围是 $[0,1]$，所以 a 的最大值为 1.

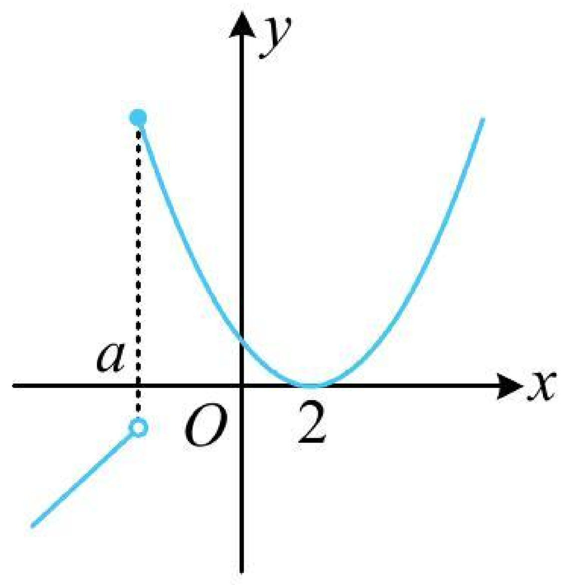


图1

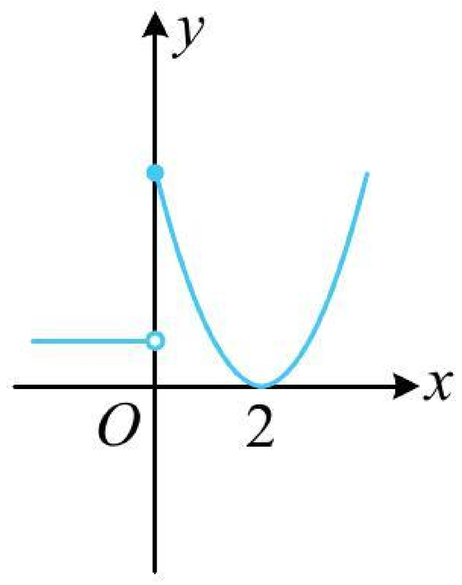


图2

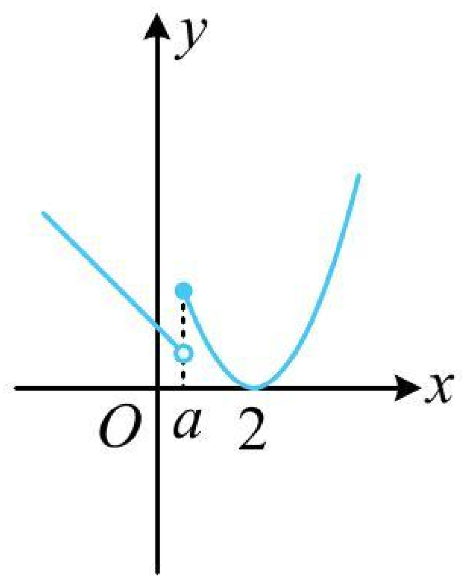


图3

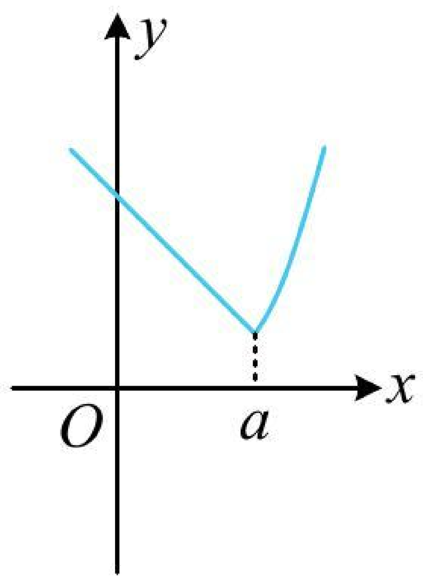


图4

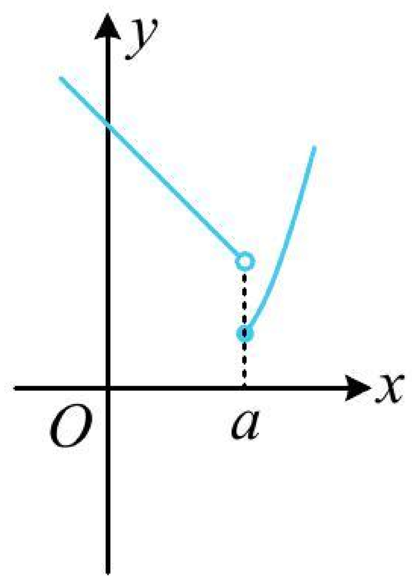


图5

【反思】本题难点在于如何准确分类，不妨思考一下分类的依据：要确定 $f(x)$ 的最小值，就得明确函数两段的单调性，而 a 与 0 的大小关系决定左段射线的单调性，a 与 2 的大小决定右段单调性，故根据 0、2 顺次分类，即可明确图象找到最小值.